

- 1) Док-ть, что $\prod_{k=1}^N p_k < 4^{p_N}$, где p_k - k -ое простое число
- 2) Конечно ли множество таких пар натуральных чисел, что все их простые множители совпадают, и простые множители чисел $(a+1)$ и $(b+1)$ тоже совпадают?
- 3) Существуют ли 6 точек на плоскости (никакие 3 не лежат на 1 й прямой, расстояния между которыми измеряются различными целыми числами?)
- 4) Может ли иррац. число в иррац. степени быть рациональным?
- 5) Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать равностор. треугольник с вершинами в узлах?
- 6) Можно ли многочлен $x^{200} \cdot y^{200} + 1$ разложить на множители?
- 7) $a + b + c = 1$. Доказать что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$
- 8) $|x| < 1$ Найти с точностью до 0.01 $\left(2 - (1-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$
- 9) Сколько цифр в числе 125^{100} ?
- 10) Найти $\sin 1^\circ$ с как можно большей точностью.
- 11) $a_1, \dots, a_{n+1}$ образуют геом. прогрессию. Найти $\sum_{k=1}^n (\cos a_k \cdot \cos a_{k+1})^{-1}$
- 12) Найти все функции для которых при всех x_1 и x_2 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^2$
- 13) Сколько решений имеет ур-е $16^{-x} = \log_{\frac{1}{16}} x$
- 14) Решить: $x^{x^n} = n$
- 15) Решить ур-ние: $\left(a + (a+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x$
- 16) Решить нер-во: $x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) < 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x}$

- 17) При каких a уравнение: $4^x + 2 = a \cdot 2^x \sin ax$ имеет ровно одно решение
- 18) Решить уравнение $\left(1 - \frac{1}{8} \cos^2 x\right)^8 = 2 \sin^2 x$
- 19) Решить $\sin^7 x + \sin^{-3} x = \cos^7 x + \cos^{-3} x$
- 20) Решить $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$
- 21) Найти r вписанной в треугольник окружности, зная r окружностей, вписанных в углы $\triangle$ и касающихся вписанной окружности внешним образом.
- 22) В $\triangle$ a - радиус описанной окружности, b - радиус вписанной окружности, c - расстояние между их центрами. Доказать, что $c^2 = a^2 - 2ab$.
- 23) Доказать, что S вписанного и описанного четырехугольника равна $\sqrt{pq}$ из произведения сторон.
- 24) В окружности проведены хорды: BC (A середина), DP и EM , проходящие через A , D и E - на $\overset{\frown}{BC}$, EP и DM пересекающиеся BC в точках K и M . Доказать: $AK = KM$.
- 25) Если все биссектрисы треугольника < 1 , то его $S < \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 26) Если все биссектрисы $\triangle$ равны, то он равносторонний
- 27) Среди всех четырехугольников с данными сторонами найти с наибольшей площадью.
- 28) Диагонали разбивают четырехугольник на 4 $\triangle$ равного периметра $\Rightarrow$ он ромб.
- 29) Найти ГМТ, сумма расстояний от которых до 2х данных прямых постоянна.
- 30) На плоскости, раскрашенной в 3 цвета, найдутся 2 точки на расстоянии 1 одного цвета.
- 31) Циркулем построить вершины какого-нибудь квадрата.
- 32) $\forall 3$ из k выпуклых множеств пересекаются, тогда и все k - мн-ва пересекаются. Что можно сказать если их число ∞ , или не все выпуклы.
- а в пр-ве (грани тетраэдра

33) С помощью одной линейки опустить $\perp$ из данной точки на данный диаметр данной окружности.
(все случаи)

34) Циркулем разделить данный отрезок на k равных частей.

35) Построить квадрат по 4 м точкам на его сторонах.

36) Построить 4х-угольник по 4м:

- а) углам и диагоналям,
- б) сторонам и углу между диагоналями,
- в) сторонам и средней линии.

37) Отсечь от данного угла прямой, проходящей через данную точку, $\triangle$

- а) данного p ;
- б) минимального p .

38) Построить сеть дорог минимальной длины, соединяющих

- а) 3
- б) 4

деревни.

48) Док. эквивалентность свойств тетраэдра:

- а) все высоты пересекаются в одной точке;
- б) одна из высот попадает в ортоцентр одной грани.

49) Один из тетраэдров внутри другого. Верно ли что у 2го тетр.

- а) сумма длин ребер
- б) сумма S граней

больше?

50) Все грани многогранника - $\triangle$ Д-ть, что найдется ребро, что все 4 прилегающие к нему углы острые.

51) Сфера касается всех сторон простр. 4-угольника. Доказать, что все точки касания лежат в 1й плоскости.

52) Доказать, что хотя бы 1 из перпендикуляров, опущенных из точки внутри выпуклого многогранника на его грани, попадет на грань, а не на ее продолжение.

54) Д-ть, что сумма всех двугранных углов тетраэдра больше 2π и $< 3\pi$. и может принимать любые значения в этих пределах.

55) $\log_2 3 \vee \log_3 5$

56) Избавиться от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$

58) $\exists$ ли α и такие рацион. p и T , что

$$\cos^2 \alpha + p \cos \alpha + T = 0 = \cos^2 2\alpha + p \cos 2\alpha + T,$$

а $\cos \alpha$ и $\cos 2\alpha$ - иррациональны.

62) $3^{\sqrt{2}} \vee 2^{\sqrt{5}}$

63) $\frac{8\pi}{27} \vee \sin \frac{8}{7}$

66) Д-ть, что $\sin 10^\circ$ - иррац.

67) Построить отрезок $\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)^4$.

68) Найти $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$