

Задача N1. $x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \leq 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x}; x > 0.$

Замена $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ или наоборот.

Задача N2. В тетраэдре суммы противоположных ребер равны. Доказать, что суммы противоположных двугранных углов равны.

N3. Биссектрисой трехгранного угла называется ГМТ, равноудаленных от его ребер. Найти необходимое и достаточное условие, чтобы две биссектрисы тетраэдра пересекались.

N4. Среди тетраэдров с данным объемом найти тетраэдр с максимальным радиусом вписанного шара.

N5. M - мн-во чисел вида $A + B\sqrt{2}$, A и B - целые. Док-ть, что в любой окрестности любого числа найдется бесконечное число чисел мн-ва M .

N6. Т. O лежит внутри $\triangle$ -ка ABC , причем $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle OAC = 10^\circ$; $\angle OCA = 30^\circ$. $BO : AC = k$. Найти $\angle ABO$.

N7. Найти все функции $F(x)$ такие, что для любых x_1 и x_2 $F(x_1) - F(x_2) \leq (x_1 - x_2)^2$.

N8. Решить ур-ние: $\sqrt{107 + \sqrt{107 + x}} = x$

Реш. $(\sqrt{107 + x} = y \Rightarrow \sqrt{107 + y} = x \Rightarrow y = x \quad \sqrt{107 + x} = x)$

N9. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\cos \alpha_i \cos \alpha_{i+1}}$

N10. Дан $\triangle ABC$. Построить т. K на стороне AB и т. M на стороне BC так, чтобы $AK = KM = MC$.

N11. В тетраэдре $KABC$ $AB = BC = CA$ и $\angle KAB = \angle KBC = \angle KCA$. Док-ть, что $KABC$ - правильная пирамида.

N12. Дан $\triangle ABC$ и т. O внутри него, причём $AB = BC$, $\angle ABC = 80^\circ$; $\angle AOC = 10^\circ$, $\angle OCA = 30^\circ$. Найти $\angle AOB$. (неверное условие)

N13. Пусть R - радиус описанного, а r - радиус вписанного в тетраэдр шара. Док-ть, что $R : r \geq 3$.

N14. Конечно ли множ-во пар целых чисел A и B таких, что мн-во простых делителей чисел A и B совпадают; а так же и чисел $A - 1$ и $B - 1$?

Реш: $A = 2^n - 1, B = (2^n - 1)^2 \Rightarrow$ бесконечно много чисел.

N15. Все биссектрисы $\triangle$ -ка меньше 1. Док-ть, что его площадь $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

N16. Построить четырехугольник по углам и диагоналям.

N17. Решить ур-ние: $\sin^7 x + \frac{1}{\sin^3 x} = \cos^7 x + \frac{1}{\cos^3 x}$.

N18. Реш. ур. $\left(1 - \frac{1}{8} \cos^2 x\right)^8 = 2 \sin^2 x$

$$\left(1 - \frac{1}{8} \cos^2 x\right)^8 = \sin^2 x \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{8} \cos^2 x \quad y^8 - 8y + 7 = 0 \quad y = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 8(1 - y)$$

N19. Через точку провести прямую, отсекающую от данного угла $\triangle$ -к данного периметра.

N20. Провести полное исследование по “ a ”: $4^x + 2 = a \cdot 2^x \sin \pi x$.

N21. Даны 4 окр-ти, причём любая из них касается трёх других. Центры трёх из них лежат на одной прямой. Расстояние от центра 4-той до этой прямой - x . Найти x , если R - радиус окр-ти.

N22. На плоскости дана окр-ть с проведенным в ней диаметром и точка. Опустить перпендикуляр на диаметр с помощью одной линейки

N23. При помощи одного циркуля разделить отрезок на n равных частей.

Построить $n \cdot AB$ и провести инверсию.

N24. Даны три окружности радиусами a, b, c . Каждая из них касается двух других, сторон $\triangle$ -ка и вневписанной окр-ти. Найти радиус последней.

N25. Может ли в сечении параллелепипеда получиться правильный пятиугольник?

N26. Дан правильный $\triangle$ -к и т. O , внутри него. $\angle BOC = x$; $\angle AOC = y$. Найти углы $\triangle$ -ка со сторонами AO , BO , CO .

(Повернуть вокруг A на угол 60° т. $O \rightarrow$ т. $O' \triangle COO'$ или $\triangle BOO'$ - искомый)

N27. В четырехугольнике O - точка перес. диагоналей. Периметры $\triangle$ -ков AOB , BOC , COD , DOA равны. Док-ть: $ABCD$ - ромб.

N28. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окр-ть с центром O . Прямая $EF \perp OK$, K лежит на EF , E - на AB , F - на CD . Док-ть что $EK = KF$.

N29. A - радиус описанной, а a - вписанной в $\triangle$ -к окр-ти. Расстояние между их центрами - b . Док-ть, что $A^2 - b^2 = 2Aa$.

N30. Даны две пересекающиеся прямые. Найти ГМТ сумма расстояний от которых до двух данных прямых постоянна.

(прямоугольник)

N31. Стороны пространственного 4-угольника касаются шара. Док-ть, что точки касания лежат в одной плоскости.

N32. Грани тетраэдра равновелики. Док-ть, что они равны.

N33. 4-угольник со сторонами a , b , c , d вписан и описан около окр-ти. Док-ть, что его площадь равна корню из $abcd$.

У вписан. четырех. $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

N34. p_n - последовательность первых n простых чисел. Док-ть, что $\prod_{i=1}^n p_i < 4^{p_n}$

N35. Есть четыре деревни лежащие в вершинах квадрата. Проложить прямые дороги так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в каждую и длина дорог минимальна.

N36. Плоскость раскрашена в три цвета. Док-ть, что $\exists$ две точки одного цвета на расст. 1.

N37. Дана последовательность $\{a_n\}$. Предел разности двух последовательных членов равен 0. Существует ли предел самой посл.ти

Ответ: (Необязательно. напр. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$)

N38. Док-ть, что синус 10° иррационален.

(Реш-ние:

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ \implies 8 \sin^3 10^\circ - 6 \sin 10^\circ + 1 = 0. \\ 2 \sin 10^\circ &= x \implies x^3 - 3x + 1 = 0.\end{aligned}$$

Все рац. корни - целые и являются делителями св. члена члена 1 но ± 1 не подходят $\implies$ корни иррациональные).

N39. Даны отрезки a и b . Построить отрезок x такой, что $\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$.

(Реш: $x = a + b + 4(\sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{ab^3}) + 6\sqrt{ab}$).

N40. Решить ур-ние: $x^{(x^n)} = n$

(Реш:

$$\begin{aligned}y \ n \geq 1 \quad x &= \sqrt[n]{n} \\ \text{при } x &> \sqrt[n]{n} \quad x^{(x^n)} > n \\ \text{при } x &< \sqrt[n]{n} \quad x^{(x^n)} < n\end{aligned}$$

)?

N41. Найти $\sin 1^\circ$.

(Найти $\sin 20^\circ$ и $\sin 18^\circ$).

N42. Можно ли расположить на плоскости 6 точек так, чтобы расстояние между любой парой точек было бы целым?

N43. У выпуклого мн-ка все грани $\triangle$ -ники. Док-ть, что у него найдётся ребро, к которому примыкают 4 острых угла.

N44. Реш. нер-во: $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\text{Реш: } 2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})}{2}} = 2^{1 + \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}} \geq 2^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

N45. Можно ли на клетчатой бумаге расположить правильный $\triangle$ -к с вершинами в узлах.

N46. Два 4-угольника подобны, если у них равны соответственные углы и угол между диагоналями. Док-ть.

N47. $y = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x}$ Найти максимум.

N48. Построить 4-уг-к по сторонам и средней линии.

N49. Среди всех 4-угольников найти с самой большой площадью. (стороны заданы).

N50. Дано два параллельных отрезка. С помощью одной линейки разделить один из них на шесть равных частей.

N51. Может ли быть иррациональная степень иррационального числа рациональной.

$$(\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3; \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 \log_2 3)$$

N52. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$

$$(\log_3 5 < \frac{3}{2} < \log_2 3)$$

N53. $a + b + c = 1$. Док-ть: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

N54. Найти $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$

N55. Можно ли представить функцию $f(x, y) = (xy)^{200} + 1$ в виде произведения двух многочленов (один от x , другой от y)

Пусть $f(x, y) = P(x) \cdot Q(y)$ Положим $x = 0$, тогда $\forall y Q(y) \cdot P(0) = 1 \implies Q(y) = \frac{1}{P(0)}$

N56. $|x| < 0.05$. Найти с точностью до 0.01 значения выражения: $\sqrt[3]{2 - \sqrt{1-x}}$

N57. $\sin \frac{8}{7} ? \frac{8}{27} \pi$

N58. $3^{\sqrt{2}} ? 2^{\sqrt{5}}$

(Реш. подбором $\frac{p}{q}$ $\log_2 3 ? \frac{p}{q} ? \sqrt{\frac{5}{2}}$

№59. C - середина хорды AB . Через C проведены 2 хорды, их концы соединены. Док-ть, что получ. хорды отсекают на AB равные отрезки.

Реш: Пусть $AC = CB = a$.

$$\begin{aligned} pq &= a^2 - x^2 & p &= \frac{x \sin \beta}{\sin \varphi} \\ mn &= a^2 - y^2 & q &= \frac{x \sin \alpha}{\sin(\varphi + \alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pq &= \frac{x^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\varphi + \alpha + \beta) \sin \varphi} = x^2 A \\ mn &= y^2 A \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{A + 1} = y^2 \end{aligned}$$

№60. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

(Реш: $y = \frac{x^3 + 1}{2}$, $y(x)$ и $x(y)$ - взаимно обратны

№61. $a^b + b^a = n$ $\exists$ ли a и b - иррац.

Док-ть $x^x = 3$ и x - иррац.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = 3 \quad \left(\frac{p}{q}\right)^p = 3^q \quad p^p = q^p \cdot 3^q \quad \frac{p^p}{x^p} = \frac{q^p \cdot 2^q}{2^q}$$